Wytrzymałość materiałów i konstrukcji 2

Wykład 11

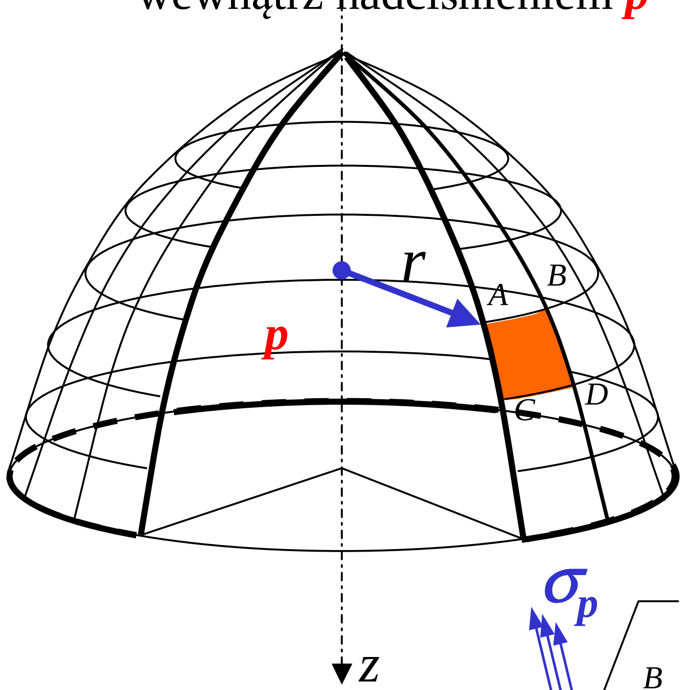
Powłoki osiowosymetryczne

Teoria błonowa

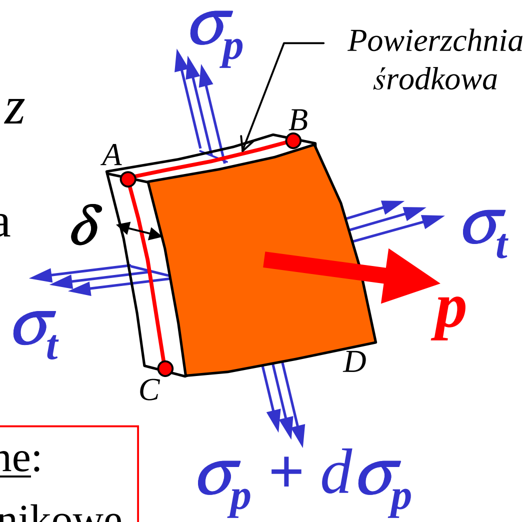
Dr inż. Piotr Marek

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Powłoka osiowosymetryczna obciążona od wewnątrz nadciśnieniem ***p***



Element płaszcza



<u>Naprężenia główne</u>:

σ_p – naprężenia południkowe

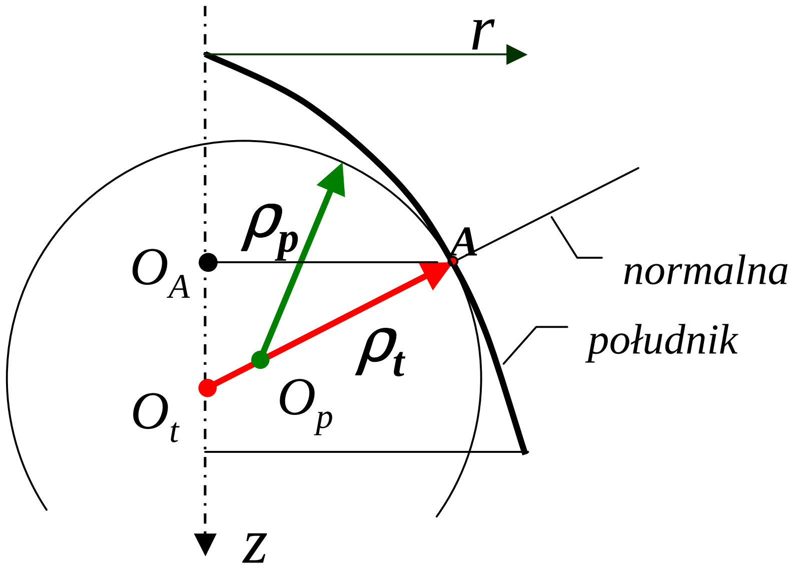
σ_t – naprężenia obwodowe

<u>Definicja geometrii:</u>

Kształt południka opisany przez funkcje:

$\boldsymbol{r}\,(z)$ – promień wodzący ($\boldsymbol{r} = |O_A A|$)

$\delta(z)$ – grubość płaszcza powłoki



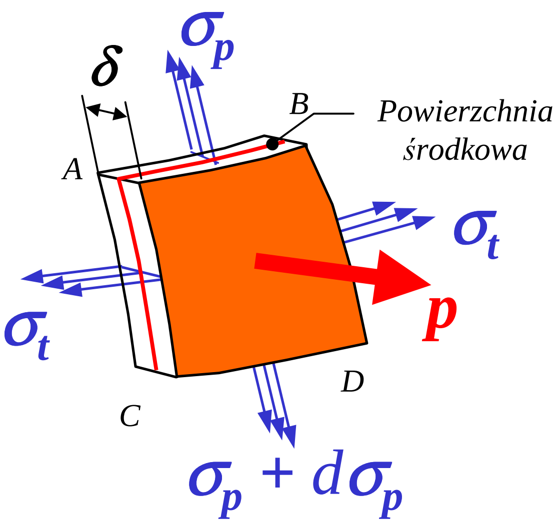
Dla powłoki osiowosymetrycznej mamy <u>dwa główne promienie krzywizny</u>:

ρ_p – promień krzywizny południka ($\rho_p = |O_p A|$)

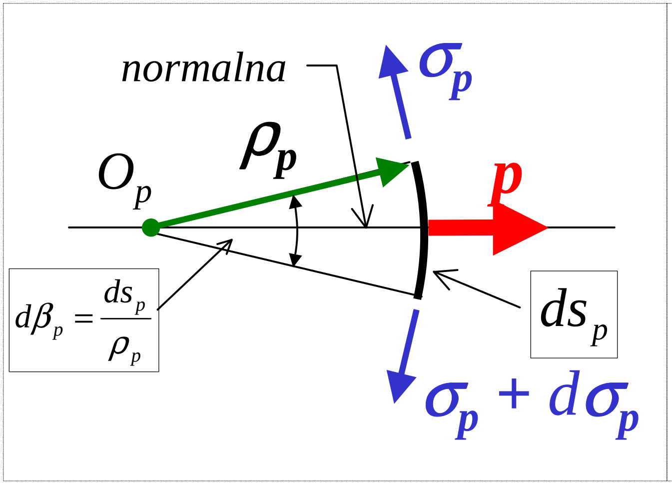
ρ_t – promień krzywizny obwodowy ($\rho_t = |O_t A|$)

Zwykle promienie krzywizny są funkcjami położenia punktu A

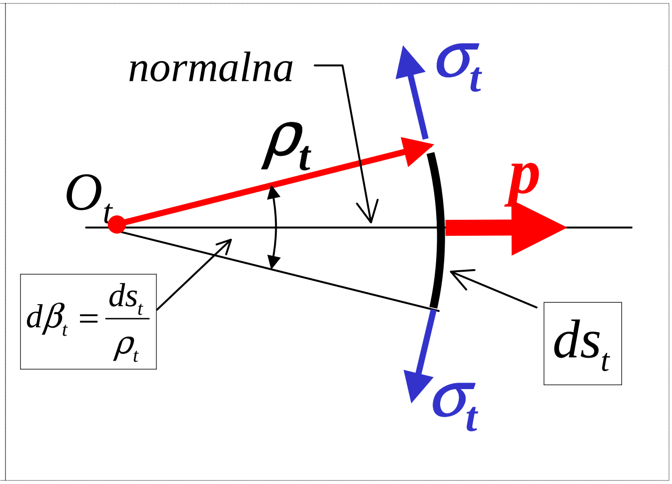
Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa



Widok z boku:



Widok z góry:



Naprężenia główne:

σ_p – naprężenia południkowe

σ_t – naprężenia obwodowe

I. Równanie równowagi sił na kierunek normalnej:

$$ds_t \cdot ds_p \cdot p - \sigma_p \cdot ds_t \cdot \delta \cdot 2\sin\frac{d\beta_p}{2} - \sigma_t \cdot ds_p \cdot \delta \cdot 2\sin\frac{d\beta_t}{2} = 0$$

$$\frac{ds_p}{\rho_p} \qquad \frac{ds_t}{\rho_t}$$

$$ds_t \cdot ds_p \cdot \left(p - \frac{\sigma_p \delta}{\rho_p} - \frac{\sigma_t \delta}{\rho_t} \right) = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}}$$

Równanie Laplace'a

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

I. Równanie równowagi sił na kierunek normalnej:

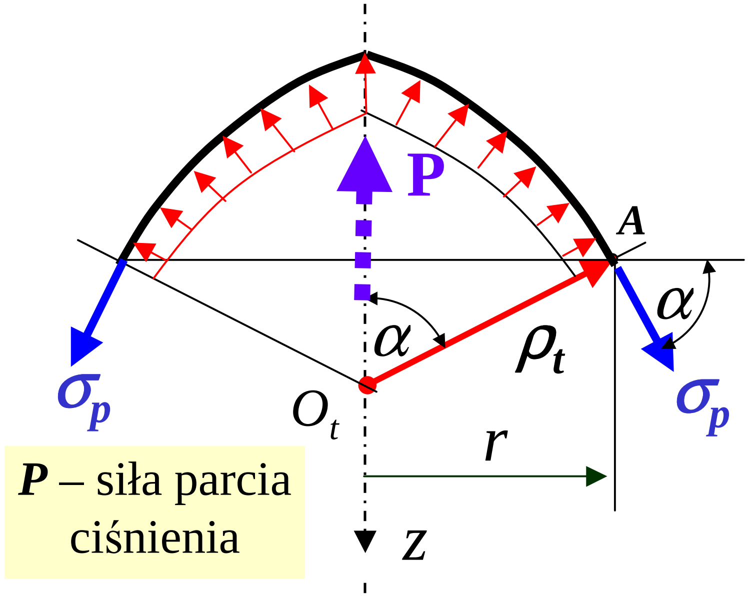
$$\boxed{\frac{\sigma_p}{\rho_p}+\frac{\sigma_t}{\rho_t}=\frac{p}{\delta}}$$

Równanie Laplace'a

II. Równanie równowagi sił na oś powłoki:

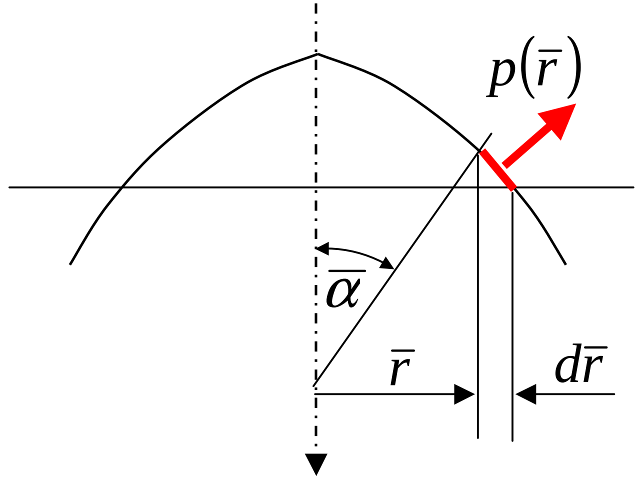
$$2\pi r\sigma_p\delta\sin\alpha - P = 0$$

$$\boxed{\sigma_p=\frac{P}{2\pi r\delta\sin\alpha}}$$



Jeśli ciśnienie zmienia się zgodnie z funkcją ***p***(*r*),
to siłę parcia wyliczymy z całki:

$$P=\int_0^r 2\pi\bar{r}\,p(\bar{r})\,d\bar{r}$$



Jeśli ciśnienie jest stałe, to siła parcia jest: $P=\pi r^2 p$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Podsumowanie:

Niewiadome: $\sigma_p \; i \; \sigma_t$

Równania:

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}$$

$$\sigma_p = \frac{P}{2\pi r \delta \sin\alpha}$$

$$P = \int_0^r 2\pi \bar{r} \, p(\bar{r}) d\bar{r}$$

Zadanie jest statycznie wyznaczalne

Traktujemy stan jako płaski stan naprężenia (**PSN**): $\sigma_3 \approx p << \sigma_p, \sigma_t$

Naprężenia zredukowane:

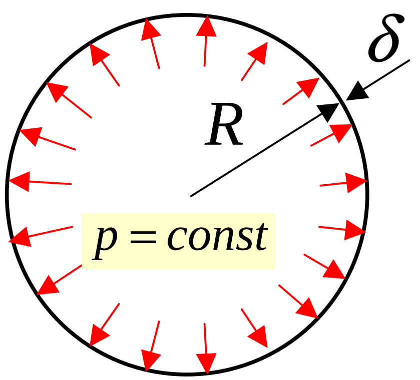
$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2}$$

lub

$$\sigma_{red}^T = \max\left(\left|\sigma_p\right|, \left|\sigma_t\right|, \left|\sigma_p - \sigma_t\right|\right)$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

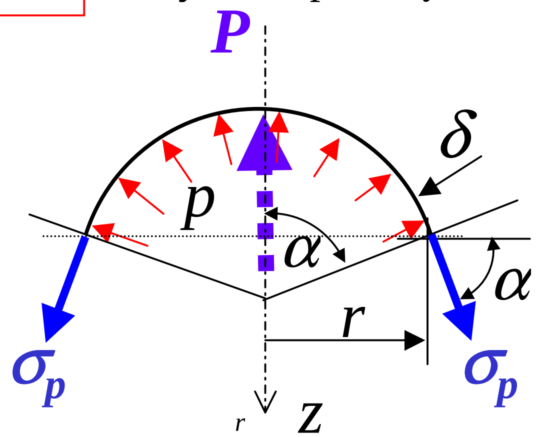
1. Zbiornik kulisty



$\rho_p = R$ $\rho_t = R$

1 sposób

Myślowe przecięcie:

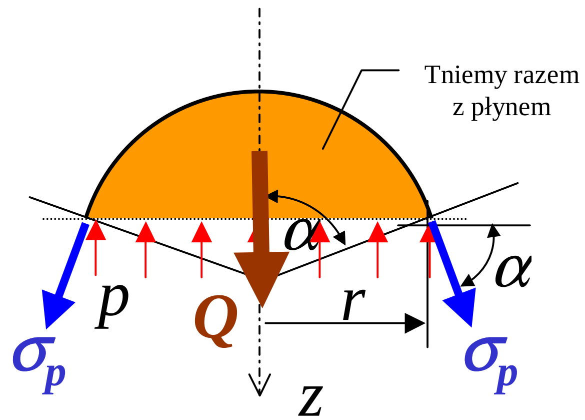


Siła parcia: $P = \int_0^r 2\pi \bar{r}\, p(\bar{r})\, d\bar{r} = \pi r^2 p$

Ciśnienie stałe!

2 sposób

Myślowe przecięcie:



Ciężar płynu: $Q = \gamma \cdot V = 0$

Zał.: **Gaz nieważki!**

1 sposób

Równanie równowagi sił na kierunek z:

$$\boxed{2\pi r\,\delta\,\sigma_p \sin\alpha - P = 0}$$

$$\sigma_p = \frac{P}{2\pi r \delta \sin\alpha} = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r \delta \sin\alpha} = \frac{pR}{2\delta}$$

2 sposób

Równanie równowagi sił na kierunek z:

$$\boxed{2\pi r\,\delta\,\sigma_p \sin\alpha - \pi r^2 p + Q = 0}$$

$$\sigma_p = \frac{\pi r^2 p - Q}{2\pi r \delta \sin\alpha} = \frac{\pi r^2 p - 0}{2\pi r \delta \sin\alpha} = \frac{pR}{2\delta}$$

Równanie Laplace'a: $\boxed{\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}}$ $\rightarrow$ $\sigma_t = \left(\frac{p}{\delta} - \frac{\sigma_p}{\rho_p}\right)\rho_t = \left(\frac{p}{\delta} - \frac{\frac{pR}{2\delta}}{R}\right)R = \frac{pR}{2\delta} = \sigma_p$

Naprężenia zredukowane:

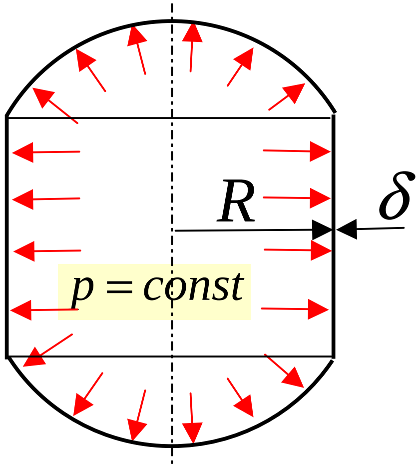
$$\sigma_{red}^{H} = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p\sigma_t + \sigma_t^2} = \frac{pR}{2\delta}$$

lub

$$\sigma_{red}^{T} = \max\left(\left|\sigma_p\right|, \left|\sigma_t\right|, \left|\sigma_p - \sigma_t\right|\right) = \frac{pR}{2\delta}$$

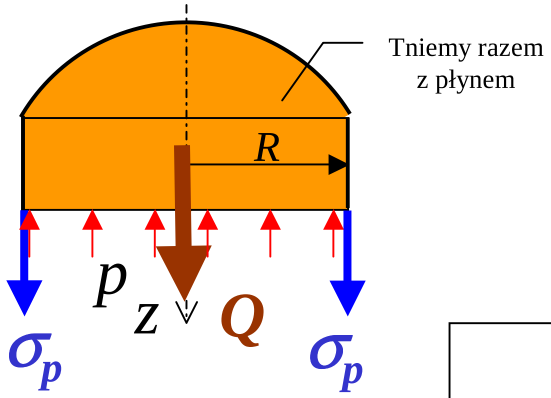
Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

2. Zbiornik walcowy



$\boxed{\rho_p = \infty}$ $\rho_t = R$

Myślowe przecięcie:



Ciężar płynu:

$$Q = \gamma \cdot V = 0$$

Zał.:**Gaz nieważki!**

Równanie równowagi sił na kierunek z:

$$\boxed{2\pi R \delta \sigma_p - \pi R^2 p + Q = 0}$$

$$\sigma_p = \frac{\pi R^2 p - Q}{2\pi R\delta} = \frac{\pi R^2 p - 0}{2\pi R\delta} = \frac{pR}{2\delta}$$

Równanie Laplace'a:

$$\cancel{\frac{\sigma_p}{\rho_p}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = \frac{p}{\delta}\rho_t = \frac{pR}{\delta} = 2\sigma_p$$

Jeśli kontur płaszcza jest linią prostą, to naprężenia obwodowe nie mają związku z naprężeniami południkowymi!

Naprężenia zredukowane:

$$\sigma_{red}^{H} = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p\sigma_t + \sigma_t^2}$$

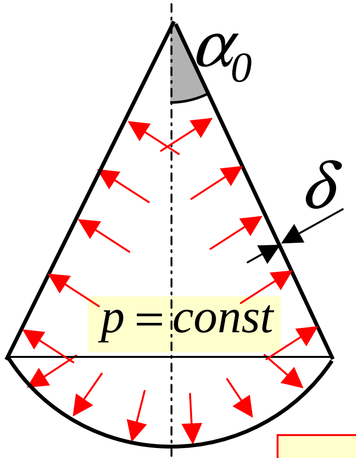
$$\sigma_{red}^{H} = \sqrt{\sigma_p^2 - 2\sigma_p\sigma_t + (2\sigma_p)^2} = \sigma_p\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}pR}{2\delta}$$

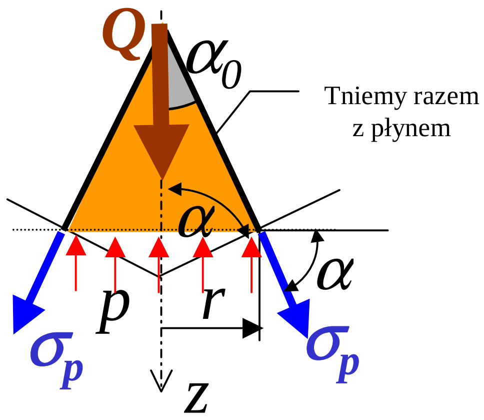
$$\sigma_{red}^{T} = \max\left(|\sigma_p|, |\sigma_t|, |\sigma_p - \sigma_t|\right)$$

$$\sigma_{red}^{T} = |\sigma_t| = \frac{pR}{\delta}$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

3. Zbiornik stożkowy





Ciężar płynu:

$$Q = \gamma \cdot V = 0$$

Zał.:**Gaz nieważki!**

Równanie równowagi sił na kierunek z:

$$\boxed{2\pi r \delta \sigma_p \sin\alpha - \pi r^2 p + Q = 0}$$

$$\boxed{\rho_p = \infty}$$

$$\boxed{\rho_t = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha_0}}$$

$$\sigma_p = \frac{\pi r^2 p - Q}{2\pi r \delta \sin\alpha} = \frac{\pi r^2 p - 0}{2\pi r \delta \sin\alpha} = \frac{pr}{2\delta \sin\alpha} = \frac{pr}{2\delta\cos\alpha_0}$$

Równanie Laplace'a:

Jeśli kontur płaszcza jest linią prostą, to naprężenia obwodowe nie mają związku z naprężeniami południkowymi!

$$\cancel{\frac{\sigma_p}{\rho_p}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = \frac{p}{\delta}\rho_t = \frac{pr}{\delta\cos\alpha_0} = 2\sigma_p$$

Naprężenia zredukowane:

$$\sigma^H_{red} = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p\sigma_t + \sigma_t^2}$$

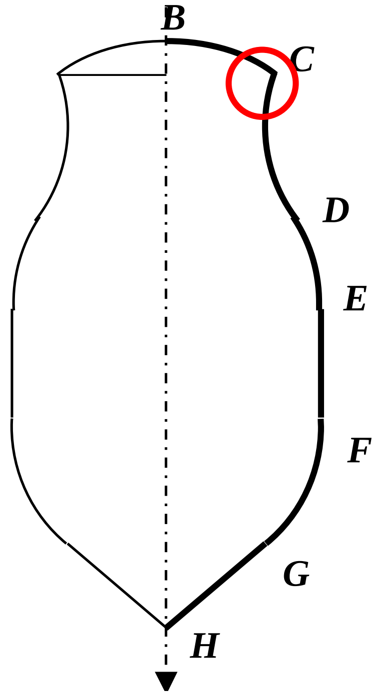
$$\sigma^H_{red} = \sqrt{\sigma_p^2 - 2\sigma_p\sigma_t + (2\sigma_p)^2} = \sigma_p\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}pr}{2\delta\cos\alpha_0}$$

$$\sigma^T_{red} = \max(|\sigma_p|, |\sigma_t|, |\sigma_p - \sigma_t|)$$

$$\sigma^T_{red} = |\sigma_t| = \frac{pr}{\delta\cos\alpha_0}$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

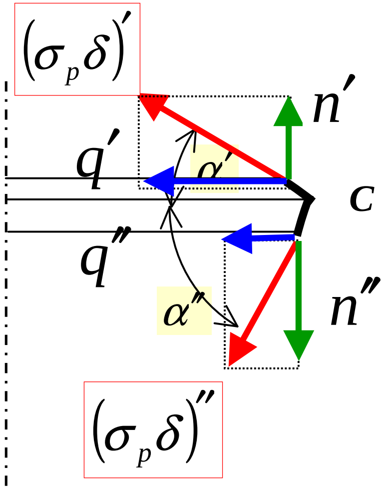
Punkty szczególne w powłokach:



Przyjmujemy idealny układ naprężeń, tzw. stan błonowy.

W rzeczywistości występują zaburzenia:

I. Załamanie płaszcza (pkt.C) – *nieciągłość I rodzaju*



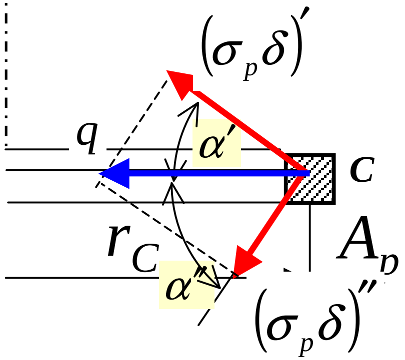
$\boxed{n' \, i \, n''}$ - te wydatki kasują się *(równowaga)*

$$\boxed{n' = n'' = \frac{P}{2\pi r_C}}$$

$\boxed{q' \, i \, q''}$ - te wydatki sumują się:

$$\boxed{q = q' + q''} = n' ctg\alpha' + n'' ctg\alpha'' = \frac{P}{2\pi r_C}\left(ctg\alpha' + ctg\alpha''\right)$$

Potrzebny jest pierścień kołowy o przekroju $\boldsymbol{A_p}$ *do przeniesienia wydatku* $\boldsymbol{q}$



Siła rozciągają lub ściskająca pierścień: $\boxed{N = q \, r_C}$

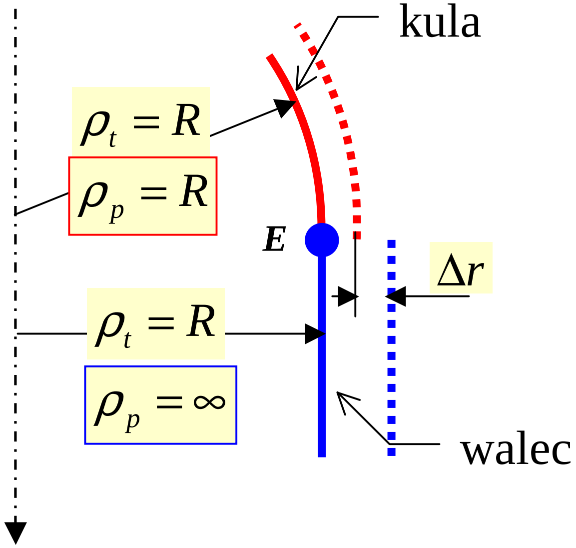
Naprężenia w pierścieniu: $$\boxed{\sigma_N = \frac{q \, r_C}{A_p}} = \frac{P}{2\pi A_p}\left(ctg\alpha' + ctg\alpha''\right)$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Punkty szczególne w powłokach:

II. Załamanie „niejawne” płaszcza (pkt.E, F i G) – *nieciągłość II rodzaju*

Skok krzywizny południkowej powoduje różną „chęć” odkształcenia obwodowego:



$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu\sigma_p\right)$$

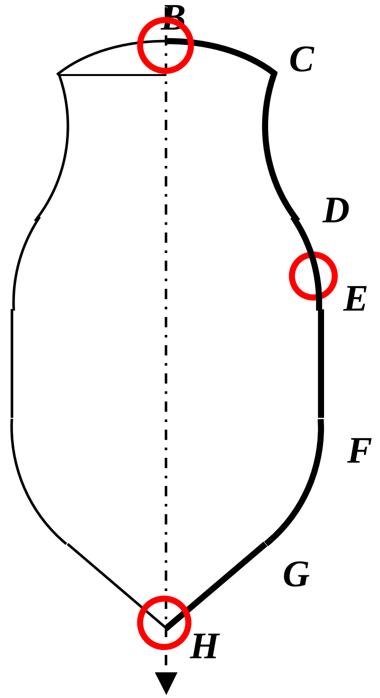
Kula:

$$\sigma_t = \frac{pR}{2\delta}$$

Walec:

$$\sigma_t = \frac{pR}{\delta}$$

$$\sigma_p = \frac{pR}{2\delta}$$



$$\Delta r = \varepsilon_t R$$

Stąd stany zgięciowe!

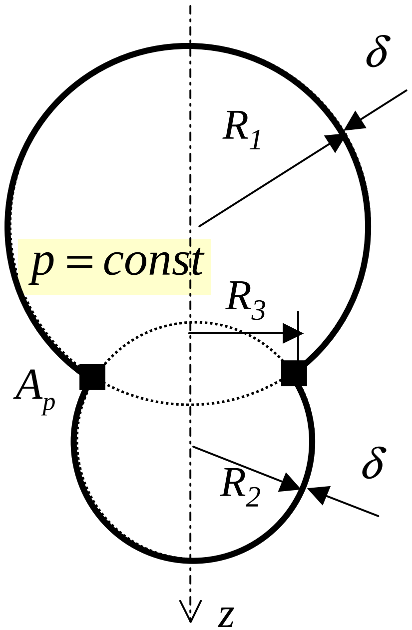
III. Zakończenie płaskie (pkt.B) pracuje jak kula o promieniu $\boldsymbol{\rho_p = \rho_t}$

IV. Zakończenie w szpic (pkt.H) daje składowe zerowe naprężenia: $\boldsymbol{\sigma_p = \sigma_t} = 0$!!!

Należy zwracać uwagę na znaki ρ_p i ρ_t!!!

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Zad.1. Zbiornik składa się z dwóch powłok kulistych. Znaleźć stan naprężenia w płaszczu i pierścieniu.



Dane:

$R_1=2m$

$R_2=1.5m$

$R_3=1m$

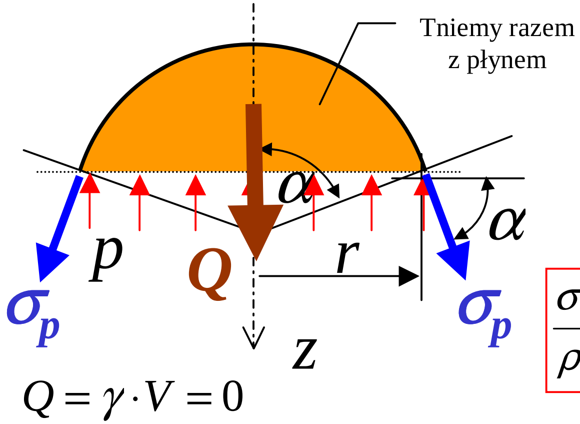
$\delta=1cm$

$A_p=100cm^2$

$p=10$ bar

(1MPa)

Czasza górna:



$Q = \gamma \cdot V = 0$

Równanie równowagi sił na z:

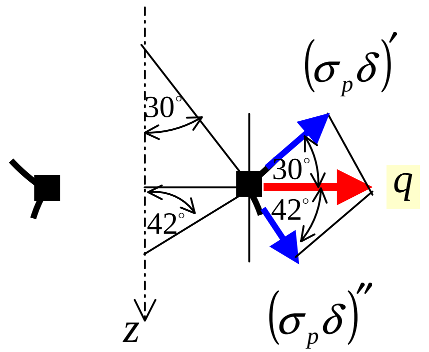
$$2\pi r\,\delta\,\sigma_p \sin\alpha - \pi r^2 p + Q = 0$$

$$\sigma_p = \frac{pR_1}{2\delta} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 0.01} = 100MPa$$

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = \frac{pR_1}{2\delta} = 100MPa$$

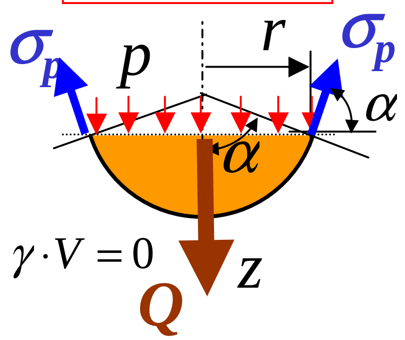
$$\sigma^H_{red} = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p\sigma_t + \sigma_t^2} = \frac{pR_1}{2\delta} = 100MPa$$

Pierścień:



$$q = (\sigma_p\delta)'\cos 30^\circ + (\sigma_p\delta)''\cos 42^\circ$$

Czasza dolna:



$Q = \gamma \cdot V = 0$

$$-2\pi r\,\delta\,\sigma_p \sin\alpha + \pi r^2 p + Q = 0$$

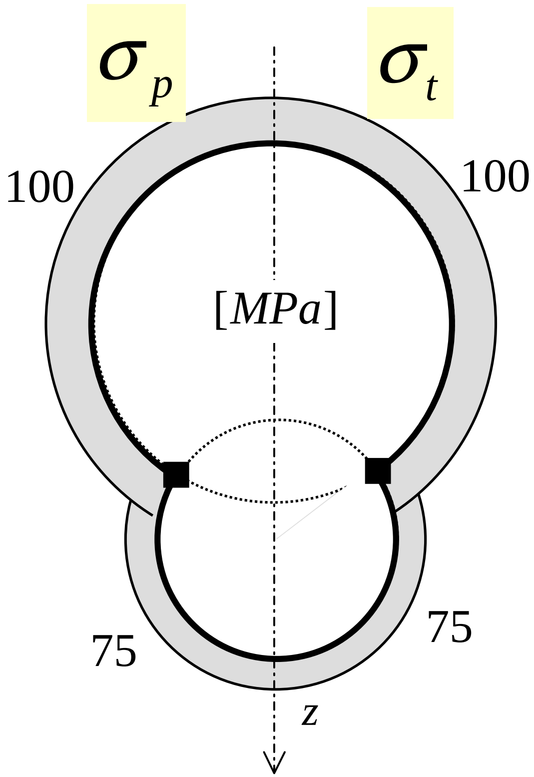
$$\sigma_p = \frac{pR_2}{2\delta} = \frac{1\cdot 1.5}{2\cdot 0.01} = 75MPa$$

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = \frac{pR_2}{2\delta} = 75MPa$$

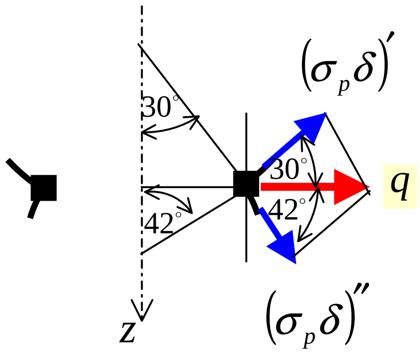
$$\sigma^H_{red} = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p\sigma_t + \sigma_t^2} = \frac{pR_2}{2\delta} = 75MPa$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Rozkłady naprężeń:



Pierścień:



Wydatek obciążający pierścień:

$$q = (\sigma_p\delta)'\cos 30^\circ + (\sigma_p\delta)''\cos 42^\circ$$

$$q = \frac{pR_1}{2\delta}\cdot\delta\cos 30^\circ + \frac{pR_2}{2\delta}\cdot\delta\cos 42^\circ$$

$$q = \frac{p}{2}\left(R_1\cos 30^\circ + R_2\cos 42^\circ\right)$$

$$q = \frac{10^6}{2}\left(2\cdot\cos 30^\circ + 1.5\cdot\cos 42^\circ\right) = 1.423\cdot 10^6\,\frac{N}{m}$$

Siła w pierścieniu:

$$N = q\cdot R_3 = 1.423\cdot 10^6\,\frac{N}{m}\cdot 1m = 1.423\,MN$$

Naprężenia rozciągające pierścień: $\sigma_N = \dfrac{N}{A_p} = \dfrac{1.423\cdot 10^6\,N}{100\cdot 10^2\,mm^2} = 142\,MPa$